E.N.S.I. CHIMIE NORD Option P 1981

# ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures

N.B. — *Les quatre parties sont dans une large mesure indépendantes.*

## I

1° Déterminer l'ensemble E des valeurs réelles de $\alpha$ pour lesquelles l'intégrale $I(\alpha) = \int_0^1 \frac{x^\alpha dx}{\sqrt{1-x^3}}$ est convergente.

2° *a.* On suppose que $a$, $b$ et $c$ appartiennent à E. Établir les inégalités :

$$0 < I(a) < I(b) \quad \text{si} \quad a > b$$

*b.* Montrer qu'il existe un nombre positif A tel que l'on ait, pour $\alpha$ assez grand

$$I(\alpha) < \frac{A}{\sqrt{\alpha}}$$

(On pourra décomposer l'intervalle d'intégration en introduisant la valeur $1 - \frac{1}{\alpha}$.)

3° *a.* Calculer la valeur de I (2).

Déterminer une relation entre I ($\alpha$) et I ($\alpha - 3$) pour $\alpha > 2$.

*b.* Pour $\alpha > 0$, on appelle $r$ le reste de la division de $\alpha$ par 3.

Montrer que l'on peut écrire :

$$I(\alpha) = C(\alpha).I(r)$$

où C ($\alpha$) se présente sous la forme d'une fraction que l'on exprimera à l'aide de $\alpha$ et de $r$.

*c.* On pose, pour $n$ entier positif,

$$u_n = \frac{C(3n+2)}{C(3n)} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{C(3n-1)}{C(3n)}$$

Démontrer la double inégalité :

$$u_n I(2) < I(0) < v_n I(2) \quad \text{pour tout entier } n \text{ positif.}$$

En déduire une valeur approchée de I (0) à $2.10^{-1}$ près.

*d.* Montrer que, quand $n$ tend vers $+\infty$, $u_n$ et $v_n$ admettent une limite commune que l'on déterminera.

En déduire $I(0) = \lim_{n \to \infty} \frac{2}{3} \frac{5.6}{2.9} \frac{11.12}{8.15} \cdots \frac{(6n-1)(6n)}{(6n-4)(6n+3)}$.

## II

1° *a.* Déterminer un développement en série entière de la fonction, définie pour $x < 1$ : $\frac{1}{\sqrt{1-x^3}}$ de la forme :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{3n}$$

Quel est le rayon de convergence de cette série?

.../...

*b.* Soit $P_n(x)$ la partie principale de degré $3n$ du développement précédent.

On pose $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^3}} = P_n(x) + R_n(x)$.

Comparer $a_{m+n}$ et $a_m$ pour $m$ et $n$ entiers, $m \geqslant 0$, $n > 0$,

et en déduire que :

$$0 < R_n(x) < \frac{x^{3n+3}}{\sqrt{1-x^3}} \qquad \text{pour} \qquad 0 < x < 1$$

2° On désigne par $Q_n$ la primitive de $P_n$ nulle pour $x = 0$.

Montrer, en justifiant soigneusement tous les passages à la limite, que $Q_n(1)$ a une limite quand $n$ tend vers $+\infty$ et que

$$I(0) = \lim_{n \to \infty} Q_n(1)$$

## III

Dans cette partie, on suppose que $\alpha$ et $\alpha + h$ appartiennent toujours à E.

1° Démontrer que les intégrales :

$$J(\alpha) = \int_0^1 \frac{x^\alpha \operatorname{Log} x}{\sqrt{1-x^3}}\,dx \qquad \text{et} \qquad K(\alpha) = \int_0^1 \frac{x^\alpha (\operatorname{Log} x)^2}{\sqrt{1-x^3}}\,dx$$

sont convergentes.

2° En majorant en fonction de $\alpha$ et de $h$ l'expression :

$$|\, I(\alpha + h) - I(\alpha) \,|$$

montrer que l'application qui à $\alpha$ associe $I(\alpha)$ est continue dans E.

3° Établir l'inégalité suivante :

$$|\, I(\alpha + h) - I(\alpha) - h.J(\alpha) \,| \leqslant \frac{h^2}{2} K(\alpha)$$

En déduire une interprétation de $J(\alpha)$.

## IV

1° Soit l'équation différentielle :

$$x(1 - x^3)\,Y' - \left(x^3 + \frac{1}{2}\right) Y = 0$$

En donner les solutions.

2° On considère l'équation différentielle :

$$x(1 - x^3)\,Y' - \left(x^3 + \frac{1}{2}\right) Y = ax^2 + bx + c \quad \text{où } a, b, c \text{ sont réels.}$$

Montrer que cette équation différentielle admet une solution développable en série entière autour de $x = 0$. Quel est son rayon de convergence? Montrer que l'on peut déterminer $a$, $b$ et $c$ pour que ce développement soit :

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} I(n)\, x^n$$

où $I(n)$ a été défini dans la première partie.

XXXXXXXX

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes




Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail